

# Matriz de Reflexión

**Universidad de San Carlos de Guatemala**  
Facultad de Ciencias Químicas y Farmacia  
Matemática IV  
*Rony José Letona QQ 200960024*

# Índice

<b>1. Deducción de la Matriz</b>	<b>1</b>
1.1. Plano en $\mathbb{R}^3$	1
1.2. Encontrando el Punto	2
1.3. Construyendo la Matriz	3
1.4. Eigenvalores y Eigenvectores de la Matriz	4
1.4.1. Eigenvalores	4
1.4.2. Eigenvectores	5
<b>2. Programa</b>	<b>7</b>
2.1. Objetivo	7
2.2. Problemática	7
2.3. Construcción del Programa	7
2.4. Conclusiones	7
<b>3. Bibliografía</b>	<b>8</b>
3.1. Literatura	8
3.2. Herramientas	8

# 1. Dedución de la Matriz

Las matrices de reflexión se utilizan frecuentemente en el área de cómputo para representar imágenes tridimensionales reflejadas sobre un espejo virtual. También se usan para no tener que generar coordenadas de imágenes u objetos simétricos muy complejos (se reflejan). Es por esto que se consideró encontrar una forma general de la matriz de reflexión. Una forma que, siendo tan general, permitiera reflejar cualquier punto en el espacio sobre cualquier plano que se desee. Se procederá ahora a construir un plano en 3 dimensiones. Para esto se mostrarán dos formas de hacerlo.

## 1.1. Plano en $\mathbb{R}^3$

Un plano en  $\mathbb{R}^3$  se puede construir de dos formas diferentes. La primera es a partir de un punto, dos vectores y un parámetro, mientras que la segunda solo requiere de un vector y un punto. Al final el plano se puede representar de varias maneras, para este caso solo es pertinente hablar de tres.

Se procede entonces a construir el plano  $\varepsilon$  a partir de dos vectores, un punto y dos parámetros. Sean  $\vec{u}, \vec{v}$  vectores en  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$  y con dirección diferente,  $A$  un punto cualquiera en  $\mathbb{R}^3$  y  $t, s$  parámetros.

$$\varepsilon : X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Se colocan ambos vectores sobre el punto y se multiplica cada uno por un parámetro generando tantos vectores como números reales hay. La suma de estos hace que se generen aún más vectores, pero en direcciones paralelas a los dos vectores anteriores. Es por esto que, de todos los puntos a los que apuntan todos esos vectores se genera un plano.  $X$  son todos los puntos de los que consta el plano.

La otra forma de construir un plano no es tan fácil de visualizar a partir de la representación. Sea pues  $\vec{n}$  un vector en  $\mathbb{R}^3 \ni \vec{n} \perp \varepsilon$  y  $A \in \mathbb{R}^3$ . La construcción se realiza de la forma siguiente

$$\varepsilon : \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$$

$$\varepsilon : \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Que al operar se puede expresar como

$$\varepsilon : n_x x + n_y y + n_z z = n_x A_x + n_y A_y + n_z A_z = k \quad (3)$$

Donde  $k$  es una constante que se obtiene del producto punto entre  $A$  y  $\vec{n}$ . En esta representación se puede valuar puntos para comprobar si estos pertenecen al plano, las coordenadas del vector normal se pueden ver acompañando a los coeficientes  $x, y, z$  que representan a todos los puntos sobre el plano.

En este caso se trabajará con la segunda forma de construir el plano. De cualquier manera, si se tiene los dos vectores y se desea hallar el vector normal al plano que se necesita para la segunda construcción, solo se debe de realizar el producto cruz o producto vectorial entre ambos.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \quad (4)$$

## 1.2. Encontrando el Punto

El problema a discutir en este documento es, realmente, el encontrar una matriz general que pueda reflejar un punto sobre un plano. Para ello, sea  $\vec{v}$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ ,  $A \in \mathbb{R}^3$  y  $\vec{n}$  el vector ortogonal al plano  $\varepsilon$  en  $\mathbb{R}^3$ . El vector  $\vec{v}$  está apuntando a un punto que se representará como  $v$ . Se procede entonces a construir el plano  $\varepsilon$  con respecto al cual, se reflejará el punto  $v$ .

$$\varepsilon : \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A \quad (5)$$

Ahora, para reflejar el punto  $v$  sobre  $\varepsilon$  se desea saber la distancia mínima entre el punto y el plano. Para ello debe de encontrarse el punto del plano que esté más cerca del punto  $v$ . Para ello, se puede proceder de dos formas: la primera es realizando una proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\varepsilon$ , la otra es construyendo una recta con  $v$  y  $\vec{n}$  y encontrando el punto donde esta corte el plano. Se utilizará la segunda forma, ya que la proyección conlleva proyectar encontrar vectores sobre el plano, proyectar  $\vec{v}$  sobre cada uno y sumar las proyecciones.

Sea  $g$  la recta construida sobre  $v$  con el vector  $\vec{n}$  y  $t$  como parámetro.

$$g : X = v + t \cdot \vec{n} \quad (6)$$

Ahora, se cortará el plano con la recta sustituyendo a  $X$  de la ecuación (5) con el de la recta.

$$n_x(t \cdot n_x + x) + n_y(t \cdot n_y + y) + n_z(t \cdot n_z + z) = n_x A_x + n_y A_y + n_z A_z \quad (7)$$

Se despeja para encontrar el parámetro  $t$

$$t = \frac{(A_x - v_x)n_x + (A_y - v_y)n_y + (A_z - v_z)n_z}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{\vec{n} \cdot (A - v)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (8)$$

Para terminar, se reintroduce el parámetro  $t$  en la ecuación (6). Nótese que la resta de dos puntos proporciona sentido de dirección, por lo que  $(A - v)$  daría como resultado un vector.

$$X = v + \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot (A - v)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (9)$$

Nótese que en la ecuación (9) se está realizando una proyección de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{n}$ . Entonces  $X$  es un vector, el cual apunta hacia el punto más cercano al punto  $v$ . Se ha encontrado el punto más cercano al punto que se desea reflejar. Ahora se procederá a reflejarlo.

### 1.3. Construyendo la Matriz

Ahora ya se conoce el punto, se construirá dos vectores:  $\vec{e}_1$  cuya dirección es de  $v$  al plano y otro vector  $\vec{e}_2$  cuya dirección será contraria.

$$\vec{e}_1 = X - v = \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot (A - v)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (10)$$

$$\vec{e}_2 = v - X = -\vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot (A - v)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (11)$$

Se procede entonces a sumarle este nuevo vector  $\vec{e}_1$  al punto obtenido en la ecuación (9), de forma en que se obtenga las coordenadas del punto reflejado  $v'$ .

$$v' = X + \vec{e}_1 = 2X - v = v + 2\vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot (A - v)}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (12)$$

Al operar esto se obtiene un vector  $v'$  en donde cada coordenada depende de las tres coordenadas del vector  $v$ .

$$v' = \begin{bmatrix} 2n_x \frac{(A_x - v_x)n_x + (A_y - v_y)n_y + (A_z - v_z)n_z}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \\ 2n_y \frac{(A_x - v_x)n_x + (A_y - v_y)n_y + (A_z - v_z)n_z}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \\ 2n_z \frac{(A_x - v_x)n_x + (A_y - v_y)n_y + (A_z - v_z)n_z}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$= \frac{2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{bmatrix} (A_x - v_x)n_x^2 + (A_y - v_y)n_y n_x + (A_z - v_z)n_z n_x \\ (A_x - v_x)n_x n_y + (A_y - v_y)n_y^2 + (A_z - v_z)n_z n_y \\ (A_x - v_x)n_x n_z + (A_y - v_y)n_y n_z + (A_z - v_z)n_z^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

Considerando que cada componente de  $(A - v)$  está operado en cada una de las coordenadas de  $v'$ , se puede optar por reescribir lo anterior de la siguiente forma

$$v' = \frac{2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x - v_x \\ A_y - v_y \\ A_z - v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

A la siguiente expresión se le pondrá nombre y este será  $M$ .

$$M = \frac{2}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Entonces, la ecuación (15) se puede reescribir de la siguiente forma

$$v' = M \cdot (A - v) + v \quad (17)$$

$$= M \cdot A - M \cdot v + I \cdot v \quad (18)$$

$$= M \cdot A + (I - M) \cdot v \quad (19)$$

En donde  $I$  es la matriz identidad. Si  $A = 0$  entonces el plano sobre el que se deseaba reflejar el punto está sobre el origen. Entonces la ecuación (19) se puede reescribir como

$$v' = (I - M) \cdot v \quad (20)$$

A  $I - M$  se le conoce ya como *Matriz de Reflexión* y en este caso se representará como  $R$ . Por lo que el punto reflejado  $v'$  se puede calcular de la siguiente forma

$$v' = R \cdot v \quad (21)$$

Y la forma general de una matriz de reflexión  $R$  es la siguiente

$$R = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2n_x^2}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & -\frac{2n_x n_y}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & -\frac{2n_x n_z}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \\ -\frac{2n_x n_y}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & 1 - \frac{2n_y^2}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & -\frac{2n_y n_z}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \\ -\frac{2n_x n_z}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & -\frac{2n_y n_z}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} & 1 - \frac{2n_z^2}{n_x^2+n_y^2+n_z^2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Si  $\vec{n}$  fuera un vector unitario, entonces  $R$  se podría simplificar a

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_x n_y & 1 - 2n_y^2 & -2n_y n_z \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1 - 2n_z^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

## 1.4. Eigenvalores y Eigenvectores de la Matriz

En esta sección se pretende calcular los valores propios de la matriz de reflexión  $R$ . Esto con el fin de que, conociendo el escalar equivalente a la matriz, un vector propio de la matriz sea más fácil de reflejar sobre el plano.

$$R \cdot \vec{r} = \rho \cdot \vec{r} \quad (24)$$

### 1.4.1. Eigenvalores

El cálculo de los eigenvalores no es tan complicado. Sin embargo, la matriz que se tien ahorita no contiene números, por lo que los eigenvalores, pueden quedar en función de las variables en la matriz. Se procede entonces a calcular los valores característicos de la matriz. De la ecuación (24) se puede deducir que

$$R \cdot \vec{r} - \rho \cdot \vec{r} = \vec{0} \quad (25)$$

$$(R - \rho I) \cdot \vec{r} = \vec{0} \quad (26)$$

Se tienen dos soluciones en este caso:  $(R - \rho I) = \vec{0}$  ó  $\vec{r} = \vec{0}$ . La segunda es la solución trivial, la cual no es de interés, por lo que entonces se procede a resolver el primer sistema

$$(R - \rho I) = \begin{pmatrix} -\rho - \frac{2n_x^2}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} + 1 & \frac{-2n_x n_y}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} & \frac{-2n_x n_z}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} \\ \frac{-2n_x n_y}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} & -\rho - \frac{2n_y^2}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} + 1 & \frac{-2n_y n_z}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} \\ \frac{-2n_x n_z}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} & \frac{-2n_y n_z}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} & -\rho - \frac{2n_z^2}{n_z^2+n_y^2+n_x^2} + 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad (27)$$

Ahora se obtendrá la determinante de la matriz para llegar al polinomio característico y así encontrar los valores propios; los ceros del polinomio.

$$\det |R - \rho I| = -\rho^3 - 2\rho^2 \left( \frac{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} - 3 \right) + 4\rho \left( \frac{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} - 3 \right) - 2 \left( \frac{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} \right) + 1 \quad (28)$$

$$= -\rho^3 + 4\rho^2 - 8\rho - 1 \quad (29)$$

$$= -(\rho - 1)^2(\rho + 1) \quad (30)$$

Ya que el polinomio es de grado tres, se esperan tres ceros donde mínimo uno es real. Se procede a resolver la ecuación (30) igualada a 0. Los resultados son

$$\rho_1 = 1$$

$$\rho_2 = 1$$

$$\rho_3 = -1$$

Nótese que hay multiplicidad en 1. Fuera de eso, ya se obtuvo los eigenvalores de la matriz de reflexión. Estos pueden ser utilizados en lugar de la matriz para todo eigenvectorvector de la misma.

### 1.4.2. Eigenvectores

Para encontrar los eigenvectores, se tomará en cuenta ya, a los eigenvalores. Se busca entonces un vector que al ser multiplicado por 1 o  $-1$  siga siendo un eigenvector de la matriz  $R$ . Se busca el vector  $\vec{r}$  que cumpla con cualquiera de las siguientes condiciones

$$R \cdot \vec{r} = 1 \cdot \vec{r} = \vec{r} \quad (31)$$

$$R \cdot \vec{r} = (-1) \cdot \vec{r} = -\vec{r} \quad (32)$$

Para ello se hará la expansión con el fin de llegar a una expresión de donde se pueda intuir quienes son los vectores propios.

$$R \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} \frac{-(2n_x n_z r_z + 2n_x n_y r_y - n_z^2 r_x - n_y^2 r_x + n_x^2 r_x)}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} \\ \frac{-(2n_y n_z r_z - n_z^2 r_y + n_y^2 r_y - n_x^2 r_y + 2n_x n_y r_x)}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} \\ \frac{-(n_z^2 r_z - n_y^2 r_z - n_x^2 r_z + 2n_y n_z r_y + 2n_x n_z r_x)}{n_z^2 + n_y^2 + n_x^2} \end{bmatrix} = \vec{r} - 2 \cdot \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (33)$$

Ahora se debe poner especial atención a los dos siguientes sistemas, puesto que de ellos se intuye la identidad del vector  $\vec{r}$ . Primero se analizará en el caso en el que el eigenvalor es 1.

$$\vec{r} = \vec{r} - 2 \cdot \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (34)$$

$$\vec{0} = -2 \cdot \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (35)$$

$$\vec{0} = \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (36)$$

Esto solo puede suceder si  $\vec{r}$  es  $\vec{0}$ , lo cual sería la solución trivial que no es de interés, y si  $\vec{r}$  es ortogonal a  $\vec{n}$ , lo cual se puede interpretar como todo aquel vector sobre el plano. Esto es

lógico, puesto que si se le aplica la matriz de reflexión a cualquier vector sobre el plano, este vector quedará igual; la distancia de su punta hacia el plano es 0.

El otro sistema que es pertinente analizar es el caso en el que el eigenvalor es  $-1$ . En este caso, se procede de la misma forma que como se hizo anteriormente

$$-\vec{r} = \vec{r} - 2 \cdot \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (37)$$

$$-2 \cdot \vec{r} = -2 \cdot \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (38)$$

$$\vec{r} = \vec{n} \cdot \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \quad (39)$$

En este último caso, se puede notar que el vector  $\vec{r}$  tiene la misma dirección que el vector normal. Generalizando, esto se puede interpretar como todos los vectores que son ortogonales al plano.

En conclusión, los eigenvalores de la matriz de reflexión son 1 y  $-1$ . Los eigenvectores son todos aquellos que estén sobre el plano o sean ortogonales a él. Se puede hablar de más eigenvalores si se considera la siguiente propiedad.

Sea  $c$  una constante cualquiera.

$$c \cdot R \cdot \vec{r} = c \cdot \rho \cdot \vec{r} \quad (40)$$

Entonces, por la propiedad anterior, se puede extender esto a que existen infinitos eigenvalores, con la única condición de que estos sean de magnitud opuesta entre sí, y que existen infinitos eigenvectores, con la condición de que estos sean paralelos u ortogonales a  $\vec{n}$ .

## 2. Programa

### 2.1. Objetivo

El objetivo inicial del programa era comparar la eficiencia en la velocidad de cálculos entre el programa diseñado con la matriz de reflexión y su eigenvalor. Aparte de eso se deseaba realizar un programa al que se le pudieran ingresar una serie de vectores en  $\mathbb{R}^3$ , y este los reflejara sobre un plano definido por el usuario. Al realizar la deducción completa se esperaba encontrar tanto a los eigenvalores para realizar tal operación como a los eigenvectores que cumplieran con este tipo de condición. Sin embargo, se llegó a un problema.

### 2.2. Problemática

Al encontrar qué valores propios tenía la matriz de reflexión, era solo de encontrar la serie de vectores que cumplieran con la ecuación (24) para construir el programa. El problema fue que los eigenvectores solo podían estar sobre el plano o ser ortogonales a este. Por ende, cualquier vector en  $\mathbb{R}^3$  tendría que ser primero proyectado sobre el vector normal al plano para poder ser reflejado con el eigenvalor encontrado.

La proyección se puede realizar y, la verdad, no es tan difícil. El problema reside en que para proyectar cualquier vector sobre el vector ortogonal del plano, se necesita realizar un cálculo a través de una matriz que es, de hecho, casi igual a la matriz de reflexión. Además de eso, se debe de terminar reflejándolo con su eigenvalor. Es por esto que no se pudo alcanzar el objetivo buscado. Las operaciones a realizarse son casi las mismas.

### 2.3. Construcción del Programa

El programa se debió construir entonces con la matriz de rotación como su *sistema principal*. Para no descartar la idea de optimizar el programa, se le añadió a este un sistema para identificar los vectores propios y así, no tener que calcularlos vía la matriz. De esta manera, el anterior problema se aprovechó como una ventaja.

Como lenguaje de programación se utilizó Python, versión 2.5.2. La versatilidad de este lenguaje permite concentrarse más en la funcionalidad del programa que en la sintaxis del lenguaje. Por eso se escogió. Además, se trabajó con funciones (o métodos) y sin objetos para la mejor comprensión del programa.

### 2.4. Conclusiones

Después del análisis del programa terminado, se concluyó que el haber encontrado los eigenvalores y eigenvectores de la matriz puede ser de gran utilidad si los cálculos de la matriz consumen muchos recursos. En este caso en particular no se nota la diferencia, pero se debe considerar que los vectores con los que se trabajó y el espacio en el que se hizo esto no es tan complicado. Por otra parte, si se desea hacer muchos cálculos de diferentes puntos, para una superficie por ejemplo, puede que el tiempo se reduzca usando este algoritmo.

## 3. Bibliografía

### 3.1. Literatura

- Grossman S. 1984. *Elementary Linear Algebra*. 2 ed. Wadsworth
- Poole D. 2004. *Álgebra Lineal: Una Introducción Moderna*. Thomson

### 3.2. Herramientas

- Python: *Interactive, High-Level Object-Oriented Language*. Version 2.5.2.  
<http://www.python.org/>
- SAGE: *Open Source Mathematics Software*. Version 3.1.4. 2008.  
<http://www.sagemath.org/>
- TexMaker: *Free L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Editor*. Version 1.7. 2008.  
<http://www.xmlmath.net/texmaker/>